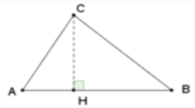
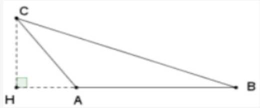
Produit scalaire de deux vecteurs

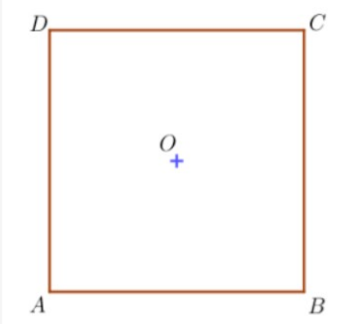
Définition 1

Soient A, B et C trois points du plan avec $A \neq B$ et $A \neq C$.

H est le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB).

Si H appartient à la demi-droite [AB]	Si H n'appartient pas à la demi-droite [AB]
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$	 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul ($A = B$ ou $A = C$), on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$



? *Exemple*

$ABCD$ est un carré de côté 2 et de centre O.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Calcul du Produit scalaire avec le cosinus.

Propriété 1 — *Fondamental*

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$.
- Si A, B et C sont trois points distincts, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Complément

$(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.

? *Exemple*

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$
  $=$
  $=$

Propriété 2 — *Fondamental*

Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

et on note $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$.

Bilinéarité et symétrie du produit scalaire

Propriété 3 — *Fondamental*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Identités remarquables

Propriété 4 — *Fondamental*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Vecteurs orthogonaux

Définition 2 — *Définition*

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux**

- lorsque l'un des deux est le vecteur nul,
- **ou** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété 5 — *Fondamental*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire** est **nul**, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$